A 29.
– EGYBEN ELSŐ NEMZETKÖZI –
ORTVAY RUDOLF
FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 1998

Az ELTE TTK Fizikus Diákköre és a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete 1998-ban is meghirdeti a hagyományos, immár 29-ik, ezúttal első ízben nemzetközi Ortvay Rudolf Fizikai Feladatmegoldó Versenyt.

Időpont: 1998. október 30 – november 9.

Az Ortvay verseny régi hagyomány az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. A hajdani versenyzők közül sokan már híres tudósok, egyetemi professzorok – annak idején az Ortvay-feladatok megoldása során mutatták meg oroszlánkörmeiket.

A verseny 1998-ban először – de reméljük, nem utoljára – **nemzetközi** lesz. Előzetes propagandánk hatására máris több mint húsz országból érkeztek érdeklődő levelek. Igy alkalom adódik arra, hogy a különböző országok és különböző egyetemek hallgatói összemérhessék tudásukat, ötleteiket, feladatmegoldó képességüket és a rutinon túlmutató, a feladatok mélyére hatoló fizikai érzéküket. Bár a díjazás egyéni, egy ilyen széles körű verseny egyben az anyaintézmények, a versenyzők tudását és képességeit csiszoló egyetemek vetélkedése is.

Az Ortvay versenyen minden egyetemi hallgató indulhat – az értékelés és a díjazás évfolyamonként történik. A doktoranduszok külön kategóriát alkotnak. A verseny egyéni: páros vagy csoportosan írt dolgozatokat nem fogadunk el. Kérjük megadni a versenyző egyetemét, szakát és évfolyamát. Álnév vagy jelszó nem használható, minden versenyző valódi néven indul.

A feladatok 1998. október 30-án, pénteken, közép-európai idő szerint 12 órától magyar és angol nyelven, html és LaTeX formátumban letölthetők az Ortvay-verseny weblapjáról

http://ludens.elte.hu/ortvay.

A *dgy@ludens.elte.hu* e-mail címre megküldött előzetes kérésre e-mailen is postázzuk a feladatokat. Budapesten emellett a feladatok – ugyanettől az időponttól – nyomtatott formában is átvehetők a Gólyavárban (H-1088 Budapest, Múzeum krt. 6-8.) és az ELTE Lágymányosi Fizika–Kémia tömbjének (H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/A) földszinti társalgójában. A Gólyavárban, a Hallgatói Irodában a későbbiekben egy mesterpéldány áll a fénymásolni kivánók rendelkezésére.

A BME-n, a JATE-n, a KLTE-n és számos külföldi egyetemen helyi szervezők intézik a feladatok sokszorosítását és kiosztását.

Figyelem! A szervezők minden igyekezete ellenére is előfordulhat, hogy egy-egy értelemzavaró fogalmazási vagy gépelési hiba marad a feladatok szövegében. Érdemes ezért a továbbiakban is figyelni a fenti weblapot, illetve a gólyavári és lágymányosi hirdetőtáblát, ahol az esetleges javításokat, módosításokat azonnal közzétesszük.

A verseny feladatai az elméleti fizika különböző területeiről és a fizika alkalmazásai köréből származnak. Egy évben általában 30 – 35 feladatot tűzünk ki. Ezek különböző nehézségi fokúak, de minden hallgató találhat évfolyamának megfelelő feladatokat. Egy versenyző maximálisan 10 feladat megoldását adhatja be. Minden feladat megoldására maximálisan 100 pontot lehet kapni.

A feladatok megoldásához *bármilyen segédeszköz használható*. Könyvre, folyóiratcikkre hivatkozni lehet.

Minden feladat megoldását külön A4-es lap(ok)ra kérjük leírni. Egy lapnak csak az egyik oldalára írjunk vagy nyomtassunk! Ne írjunk ceruzával vagy vékony másolópapírra – ezeket nem tudjuk elfaxolni a megoldások javítóinak. Az ilyen dolgozatokat nem fogadjuk el.

Ha a megoldáshoz számítógépes program is tartozik, kérjük írásban megadni a program részletes dokumentációját (milyen nyelven íródott, hogyan lehet elindítani, milyen paramétereket lehet beállítani, melyik betű mit jelent, hogyan kell a program készítette ábrákat vagy táblázatokat értelmezni, stb.) A programokat floppylemezen lehet mellékelni, vagy e-mailen lehet elküldeni az alább megadott címre.

A megoldásokat személyesen, postán, faxon vagy e-mailen (LaTeX formátumban, vagy, ha nincsenek benne képletek, közönséges elektronikus levélben) lehet beküldeni.

Személyesen a HALI-1-ben vagy a Lágymányosi Északi több földszintjén
Postacím: Fizikus Diákkör, Dávid Gyula,
ELTE TTK Hallgatói Iroda, Gólyavár, H-1088 Budapest, Múzeum krt. 6-8.
Faxszám: Dávid Gyula, 36/1/2662556
E-mail cím: dgy@ludens.elte.hu.

Beadási határidő: november 9. hétfő, közép-európai idő szerint 12 óra.

A verseny díjazása évfolyamonként történik, az összpontszám alapján. A zsüri fenntartja a jogot, hogy egyes díjakat ne, megosztva vagy több példányban adjon ki. A pénzjutalommal járó első, második és harmadik díjak mellett dicséretek, illetve egyes feladatok kiváló megoldásáért különdíjak is odaítélhetők. Ezért már egy-két feladat megoldását is érdemes beadni!

A verseny hagyományos szponzorai az ELTE TTK Hallgatói Alapítványa és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Emellett idén régi mecénásunk, Diósi Lajos 20 000 Ft különdíjat ajánlott fel. A legjobb eredményt elérő szegedi versenyzőt a Pro Physica Hallgatói Alapítvány 5000 Ft különdíjjal jutalmazza. Köszönjük az eddigi támogatásokat – és köszönettel fogadjuk a továbbiakat is.

A verseny eredményhirdetése **december 3-án** lesz, a hagyományos **Fizikus Mikulással** egybekötve. A pontos helyszínt később közöljük a verseny weblapján. Az ünnepélyes eredményhirdetést a feladatok megoldásának megvitatása követi. Az egyes feladatok legjobb megoldóit ezennel előre felkérjük, hogy ismertessék megoldásaikat. (A verseny egész Földre kiterjedt volta ellenére ez a felkérés értelemszerűen csak a hazai versenyzőkre vonatkozik.) A részletes eredmény ezután megtekinthető lesz a verseny weblapján. A díjazott versenyzőket e-mailben értesítjük, az okleveleket és a pénzjutalmakat postán küldjük el.

A verseny feladatait és megoldásaikat – az egyes feladatok legjobb megoldóinak szövegezésében (melyre őket ezennel felkérjük) – angol nyelvű kiadványban szeretnénk megjelentetni. Ezt a kiadványt a fizikushallgatók nemzetközi szervezete, az IAPS, valamint a verseny résztvevői segítségével világszerte terjeszteni kívánjuk. Reméljük, ez még jobban hozzájárul a verseny nemzetközivé válásához.

Sikeres versenyzést, tartalmas és hasznos fejtörést kívánunk minden versenyzőnek!

A verseny szervezői nevében

Dávid Gyula
ELTE TTK Fizikus Diákkör
dgy@ludens.elte.hu

1. A bor erjedéssel készül a szőlőből. Ennek során hő keletkezik.
a) Hány fokosra melegszik fel egy 500 literes hordó a különféle borfajták esetén?
b) Melyek a legfontosabb paraméterek, amik meghatározzák ezt a hőmérsékletet?
c) Az erjesztő baktériumok egy bizonyos hőmérséklet felett elpusztulnak. Legfeljebb mekkora méretű lehet az a hordó, amiben mindenütt forrásban marad a must? Hogyan függ ez a méret a külső hőmérséklettől?

(Horváth Anna)

2. Ha két párhuzamosan állított tükör közé nézünk, képek végtelennnek tűnő sorozatát látjuk. A tükör véges mérete miatt azonban csak véges számú kép látható.
a) Hogyan függ a látható képek száma a tükör méretétől, alakjától?
b) Vizsgáljunk több különféle módszert, amivel a párhuzamos tükrökben látható képeket megfigyelhetjük! (Csak kísérletileg megvalósítható eseteket diszkutáljunk!)

(Horváth Anna)

3. Téli reggeleken az autók ablaka sokszor csak a Nap felőli oldalon van befagyva. Miért? Adjunk kvantitatív magyarázatot!

(Bene Gyula)

4. Egy faltól a távolságban elhelyezett csuklós talpon rögzítjük egy $l > a$ hosszúságú seprűnyél alsó végét.
A nyél felső vége a falnak támaszkodik. Döntsük most kissé oldalt a seprűnyelet: a súrlódás következtében egy ideig még egyensúlyban maradhat. Mekkora az a kritikus szög, amelynél már megcsúszik a seprűnyél?
Indtsuk el a seprnyelet a legmagasabb helyzetbl egy kis oldalirny lkssel! rjuk le a mozgst!

(Gnädig Péter)

5. Adott méretű, λ és μ rugalmassági állandókkal jellemezhető téglákból tornyot építünk. Milyen magas torony áll még stabilan?

(Tichy Géza)

6. Rugalmasságtanban az u_i elmozdulásvektorból származtatott $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ deformációs tenzorra érvényes az alábbi kompatibilítási feltétel (a képletben ϵ_{ijk} a Levi–Civita-féle teljesen antiszimmetrikus egységtenzort jelöli):
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmp}\partial_j\partial_m\varepsilon_{kp} = 0.$$
Állítsuk elő a deformációs tenzorból az elmozdulásvektort!

(Tichy Géza)

7. A hallás finomságát meghatározó egyik mechanikai tényező a dobhártya alakja. Magyarázzuk meg, miért alkalmasabb a szabályos alakú (kör, ellipszis) dobhártya a finom hallásra, mint a szabálytalan! (Megjegyzés: a hallás finomságán azt értjük, hogy mennyire képes valaki megkülönböztetni két, egymáshoz közeli frekvenciájú hangot).

(Horváth Anna)

8. Az emberi vér nem képes arra, hogy fizikailag oldott állapotban elegendő mennyiségű oxigént szállítson. Ezért is vannak vörösvértestjeink (VVT), melyek ezt a feladatot el tudják végezni. De vajon mennyibe is „kerülhet” ez nekünk? Mennyi plusz energiát fordít a VVT-k szállítására egy átlagos napján egy átlagos ember ahhoz a hipotetikus esethez képest, amikor – ugyanakkora össztérfogatú vér mellett – nem lenne szüksége VVT-kre?

   Néhány figyelembe veendő szempont: a VVT-ket át kell tuszkolni a kapillárisokon (hiszen azok átmérője kisebb, mint a VVT-ké); a vér gyorsabban áramlik, mint a VVT-k; a VVT és a vér sűrűsége eltérő, így a nehézségi erő miatt többletenergia szükséges a VVT mozgatásához.

(Nagy György)

9. Egy kirándulás alkalmával elkapott minket az eső. Egy útbaeső pince eresze alól nézegettük a reménytelen időt és az eresz alján össze-összegyülő vízcseppeket, amelyek növekedvén elindultak az eresz alján a lefolyó felé, de útközben meghízva lecsöppentek. Vizsgáljuk meg a csepp kialakulásához vezető instabilitást! Adjuk meg a csepp hely-idő függvényét a lecsöppenés helyéig! Utolérhet-e egy csepp egy másikat?

(Török János)

10. Egy pipettát tartunk függőlegesen, szájával lefelé. A pipettából folyadék áramlik ki állandó sebességgel. Milyen feltételek mellett alakulnak ki cseppek a pipetta szájánál? Ha teljesülnek ezek a feltételek, akkor határozzuk meg a cseppek alakját az idő függvényében!

(Zénó Farkas)

11. Ha függőleges (üveg)csőbe száraz homokot töltünk, a lefelé áramló anyagban sűrűséghullámok indulnak el fölfelé. (Érdemes kipróbálni!) A jelenség hasonlít a közlekedési torlódások terjedéséhez. Mi a magyarázata? Mitől függ a hullámok sebessége?

(Kertész János)

12. L. Niven Gyűrűvilág című fantasztikus regényében – egyéb érdekes technikai ötletek mellett – említés történik a következő szerkezetről is: egy csillag körüli kör mentén egyenletes térközökben körpályára állítanak igen nagy számú egyforma mesterséges bolygót. Az objektumokat a kör mentén nyújthatatlan lánccal kötik össze, majd a rendszert rakétákkal felpörgetik az adott sugárhoz tartozó orbitális szögsebesség többszörösére. (Hogy mire jó ez az egész, az kiderül a regényből.)

    Vizsgáljuk meg a rendszer stabilitását, és határozzuk meg a kör mentén terjedő hullámok diszperziós relációját longitudinális, radiális, illetve a pálya síkjára merőleges perturbációk esetén!

(Dávid Gyula)

13. Két egyforma szigetelő korongot azonos mennyiségű pozitív töltéssel látunk el. Közelítsük egymáshoz a két párhuzamos korongot! Mekkora erő kell ehhez? Vázoljuk fel a két korong között kialakuló elektromos teret!

(Radnai Gyula – Gnädig Péter)

14. Milyen alakúra hajlítsunk össze egy adott szigetelt rézhuzalt, hogy a lehető legnagyobb legyen az induktívitása? Legyen az $l = 5$ m hosszú homogén rézhuzal keresztmetszete $r = 0{,}4$ mm sugarú kör, a rajta lévő szigetelő réteg vastagsága $s = 0{,}1$ mm. Mekkora lesz ennek a szigetelt huzalnak a maximális induktívitása? (Ferromágneses anyag nincs a közelben.)

    Bemelegítésül határozzuk meg e huzalból hajlított kör, illetve négyzet alakú hurok induktívitásának arányát!

(Radnai Gyula)

15. Tegyük fel, hogy az elektromágneses négyespotenciál (A^i) és a negyesáram-sűrűség (j^i) komponensei nem valós, hanem a) komplex; b) kvaternió értékeket vehetnek fel! Konstruáljuk meg a Lorentz-invariáns valós hatásintegrált, és vezessük le a téregyenleteket! „Fordítsuk le” a hiper-Maxwell-egyenleteket valós hármasvektor-mezőkre felírt parciális differenciálegyenlet-rendszerre, és keressünk meg néhány érdekes megoldást (ötletek: síkhullám, monopólus, Green-függvény)! Milyen új, a szokásos elméletben nem szereplő szimmetriái vannak az új elméletnek? Melyek a megfelelő megmaradási tételek? Milyen valóságos jelenségek modellezésére lehetne felhasználni ezt a (hiper)komplex elektrodinamikát? Egeszítsük ki a hatásintegrált tömegtaggal is, és vizsgáljuk meg ennek következményeit!

(Dávid Gyula)

16. Az első, és egyben utolsó Forma-42 fotonrakéta-versenyt 2442-ben rendezték meg a vadregényes Minkowski-téren, mindjárt a Tejút legszélső spirálkarjain túl, kint a nagy semmiben. Itt kellett tartani a versenyt, mert az ŰrKRESZ meglehetősen szigorú: rendelkezései szerint a fotonrakéták semmilyen körülmények között sem közelíthetik meg egymást 1000 km-nél jobban. Szükség volt tehát a helyre! A Forma-42 versenyen részt vevő rakéták 1 km hosszú, 10 m átmérőjű forgásellipszoidok. (A hatalmas test 42 évnyi szakadatlan üzemre elegendő anamezont, az antianyagnál is hatékonyabb üzemanyagot rejt magában.) Az orrukon és tatjukon elhelyezett pozíciójelző lámpák a Hajózási Szabályzatnak megfelelően másodpercenként bocsátanak ki egy zöld, illetve vörös fényjelet. Bernie Ecclestar, a főszervező a sportszerűség érdekében úgy rendelkezett, hogy valamennyi versenyző űrhajóját egyforma hajtóművel szereljék fel (de ezt persze nem kötötték a közönség orrára). Ez a „Mintha otthon lennél” típusú fotonmotor pontosan 1 g-nyi sajátgyorsulást szolgáltat az űrhajónak, így a pilóta valóban úgy érzi magát, mintha otthon ülne (a játékteremben). Sajnálatos műszaki hibák miatt a 42 indulóból negyvennek vissza kellett lépnie. A megmaradt két rakéta versenye kissé unalmasra sikeredett: mintegy százezer km távolságban egymás mellett lebegve egyszerre indultak el a startvonalra merőleges irányba, aztán – lévén tökéletesen egyforma szerkezetűek – egymással párhuzamosan, végig egyenes vonalban és azonos gyorsulással futva, a tökéletes szimmetria jegyében döntetlen eredményt értek el. A nézőközönség persze nem sokat látott az elszáguldó rakétákból – még szerencse, hogy a konkurrens tv-társaságok kamerákat és robottudósítókat helyeztek el az egyik, illetve másik rakéta fedélzetén. Az automata kamerák a másik versenyző rakétára irányultak – mi mást is nézhettek volna? –, a robotriporterek pedig izgatottan követték a kamera tartószerkezetének akármilyen csekély elfordulását is, mert ebből (meg persze a másik rakéta látszó szögátmérőjének és orientációjának változásából) próbáltak következtetni a verseny pillanatnyi állására. Így aztán elég izgalmas virtuális verseny kerekedett ki a tv-képernyökön. Amikor aztán a második futam során az egyik rakéta a startnál udvariasan százezer km előnyt adott a másiknak, és így pontosan egyszerre indulva, pontosan egymás nyomában futották végig a nyílegyenes kozmikus pályát, a két űrhajó fedélzetén tartózkodó robotriporterek valóságos extázisba esve közvetítették a kameráik által látott, meglehetősen furcsa versenyt.

Számítsuk ki/írjuk le/rajzoljuk le, mit láttak a kamerák az első futam alatt, majd a második futamban az elöl, illetve a hátul haladó űrhajóból nézve! Hogy változott a másik rakéta távolsága, iránya, orientációja, szögmérete, jelzőfényeinek színe, fényessége? Pótkérdés: hogyan, mikor és miért ért véget a verseny?

(Dávid Gyula)

17. A Forma-42 versenyen részt vevő két rakéta pilótái elhatározzák, hogy megvizsgálják Einstein híres régi paradoxonját a (kilo)méterrudak rövidüléséről. Ezért a két, egymás mögött lebegő űrhajót összekötik egy 1 km hosszú rúddal. Egy előre rögzített pillanatban egyszerre bekapcsolják mindkét rakéta hajtóművét, majd 1 másodpercnyi működés után kikapcsolják. (A gyorsítás iránya a rúd által meghatározott egyenesbe esik.) A pilóták jártak a tudományos óvódába, ezért tudják, hogy a relativitáselmélet szerint merev test nem létezik, és a két végét ért erőhatás következtében a rúdban longitudinális rugalmas hullámok keletkeznek. Ezt figyelembe veendő már jó előre megvizsgálták a rúd rugalmas tulajdonságait, és megmérték a csillapodó longitudinális hullámokra vonatkozó telegráfegyenlet együtthatóit. Ezért bíznak benne, hogy a hullámok szép lassan lecsillapodnak, és a rúd végül nyugalmi állapotba kerül a két rakéta új inerciarendszerében. Kövessük a hullámok terjedését a gyorsítás szakaszában, illetve a hajtóművek kikapcsolása után, és határozzuk meg a rúd hosszát a végállapotban! Mit szól ehhez Einstein professzor?

(Dávid Gyula)

18. A Forma-42 versenyen részt vett fotonrakéták egyike ezúttal (még bőségesebb, gyakorlatilag korlátlan üzemanyagkészlettel feltöltve) a még a Minkowski-térnél is vadregényesebb Riemann-téren indul próbaútra. A Naprendszer szélén lebegve megcélozza az éggömb egyik sötét, galaxisoktól mentes pontját, aztán hegyibe! Útközben persze a személyzet érdeklődéssel figyeli a Világegyetem érdekes tájait. Mit látnak az űrhajósok az út során? Hogyan változik a galaxisok fényessége, eloszlása, a kozmikus háttérsugárzás szögeloszlása és hőmérséklete az irány függvényében? A kért adatokat az űrhajó sajátidejében mérve számítsuk ki és ábrázoljuk! Adjuk meg a választ az Einstein-féle sztatikus, valamint a Fridman-féle zárt, nyílt, illetve euklideszi terű táguló Világegyetem esetén is! Mi lesz az űrhajó sorsa a távoli jövőben?

(Dávid Gyula)

19. Egyesek szerint a 2+1 dimenziós általános relativitáselméletben a kozmikus objektumok között nincs gravitációs kölcsönhatás. (Miért, a 3+1 dimenziós elméletben van?) Ha a fenti állítás igaz, akkor mi a csudáról szól egyáltalán a 2+1 dimenziós elmélet? Ha pedig nem igaz az állítás, akkor miért igaz mégis?

(Dávid Gyula)

20. Határozzuk meg a következő Hamilton-operátor sajátértékeit

$$\hat{H} = p_x^2 + x^2 + b(p_y^2 + y^2) + c(xp_y - yp_x)!$$

(József Cserti)

21. A spin mellett talán a *határozatlansági reláció*, $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, stb. az, amire a legtöbbször utalnak úgy, hogy *„tisztán kvantummechanikai jelenség, amelynek* <u>*nincs*</u> *klasszikus megfelelője”*. A szárnyaló elméknek azonban ez ködösítésnek tűnhet, és felmerülhet az axiomatikus kvantummechanika eme bástyája ellen intézendő támadás szükségessége. Talán nem is állnak olyan rosszul a dolgok, és a kvantum–klasszikus korrespondenciára éhező szépérzékünk végső soron nem sérül. A határozatlansági relációban egy tetszőleges A fizikai mennyiség átlagértéke körüli szórását kell kiszámítani:

$$\Delta A = \left(\overline{A^2} - \overline{A}^2\right)^{1/2}.$$

A kvantummechanika (QM) keretein belül a fent használt átlag (az egyszerűség kedvéért az egydimenziós esetben) a következő integrált jelenti:

$$\overline{A}_{QM} = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x) A(x) \Psi(x)\, dx,$$

ahol $\Psi(x)$ rendszer normált hullámfüggvénye. A klasszikus mechanikában (CM) persze már bajosabb megadni azt, hogy mit érthetnénk ezen az átlagon, de munkahipotézisként – jobb híján – értelmezzük A átlagát az

$$\overline{A}_{CM} = \frac{\int_0^{t_0} A(t)\, dt}{\int_0^{t_0} dt},$$

időátlaggal, aztán nézzük meg, hogy ezzel mire jutunk. Ahhoz, hogy ellenőrizhessük ennek a némileg merész választásnak a létjogosultságát, tekintsünk egy konkrét rendszert. Az $U(\mathbf{r}) = -\alpha/r$ vonzó centrális potenciálban történő klasszikus mozgás (Kepler-probléma) és kvantumos mozgás (hidrogénatom) közti hasonlóságokra (pl. szimmetriák) már régen felfigyeltek; a részletek (pályák, hullámfüggvények, energiák, stb.) pedig jól ismertek.

Keressük meg a megfelelő koordinátákat és változókat, majd számítsuk ki a szórásokat egy alkalmasan választott koordinátára és a hozzátartozó impulzusra nézve! Használjuk a fenti definíciókat (ha tudunk jobbat ajánlani, akkor hajrá...)! Van-e kapcsolat a klasszikus és a kvantummechanikai eredmények között? Lehet-e ezek alapján klasszikus határozatlansági relációról beszélni? Mit jelent itt az átlag klasszikus definíciója?

(Magyar Péter)

22. Tekintsük a

$$H(q,p) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\, p^i p^j + \sum_{i=1}^{n} h_i(q)\, p^i + f(q)$$

Hamilton-függvény által definiált rendszert, ahol $q = \{q_1, \cdots, q_n\}$ az általános koordináták összességét jelöli. Kvantáljuk a rendszert a

$$p^i \mapsto \hat{p}^i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i}, \qquad q_i \mapsto \hat{q}_i = q_i \cdot .$$

Schrödinger-féle előírás szerint. Az operátorok sorrendjének határozatlanságát a

$$\langle \psi_1 \psi_2 \rangle = \int \overline{\psi}_1 \psi_2\, d^n q$$

skalárszorzat szerinti önadjungáltság megkövetelésével szüntetjük meg.

Hogyan kell transzformálni a hullámfüggvényeket a $q_i \mapsto q_i{}'$ általános koordinátatranszformáció során, ha azt akarjuk, hogy $\hat{H}$ kovariánsan transzformálódjon? Alkalmazzuk a fenti eredményeket a kétdimenziós harmonikus oszcillátorra Descartes- és polárkoordináta-rendszer-beli kvantálás esetén!

(Bajnok Zoltán)

23. Az elektronok fermionok, így a Pauli-elv értelmében nem kerülhetnek azonos állapotba. A szupravezetőkben az elektronok párokba állnak össze (Cooper-párok), amelyek bozonok, és így azonos állapotba is kerülhetnek. Nincs itt ellentmondás? Indokoljuk a választ számítással!

(Bene Gyula)

24. Vizsgáljuk meg, lehet-e koherens állapotokat értelmezni síkrotátor esetében! A harmonikus oszcillátor koherens állapotainak mely tulajdonságait lehet átmenteni, illetve miről kell lemondani? Mi az új koherens állapotok kapcsolata a léptető operátorokkal?

(Borsányi Szabolcs)

25. Két bozon mozog egydimenziós, végtelen mély potenciálvölgyben (azaz $V(x) = 0$, ha $0 \leq x \leq a$ és $V(x) = \infty$ egyébként). Egymással merev gömbként ütköznek. Határozzuk meg az energia-sajátértékeket és az energia-sajátfüggvényeket!

(Bene Gyula)

26. A csapdába zárt, Bose-kondenzálódó alkáli-atomok alacsony energiás gerjesztéseit a következő sajátérték-probléma megoldása adja meg:

$$\omega_i^2 \phi_i(\mathbf{x}) = \hat{G}\phi_i(\mathbf{x}) \equiv -\frac{1}{m}\mathrm{div}\left[(\mu - U(\mathbf{x}))\,\mathrm{grad}\,\phi_i(\mathbf{x})\right] ,$$

$$\int_V d^3x\,\phi_i^*(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij} , \quad V = \{\mathbf{x}|\mu - U(\mathbf{x}) > 0\} .$$

A kísérletekben az $U(\mathbf{x})$ potenciál

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$$

alakú, ahol $\mu > 0$ a kémiai potenciál, m az alkáliatomok tömege, ω_x, ω_y, ω_z a csapda jellemzői, $\hbar\omega_i$ pedig a gerjesztések energiái. Milyen további, az x, y, z koordinátákat, illetve az azok szerinti deriváltakat tartalmazó, operátorok felcserélhetők $\hat{G}$-vel?

(Csordás András)

27. Fenntartható-e egy egyatomos ideális gázban ütközések nélkül, pusztán csak a részecskék szabad áramlásával a lokális egyensúly? A válasz erre a kérdésre meglepő módon **igen**. Miért? Adjuk meg a fázistér $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ eloszlásfüggvényének, az $n(t, \mathbf{x})$ lokális sűrűségnek, a $T(t, \mathbf{x})$ hőmérséklettérnek és a $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ sebességtérnek az időfüggését egy ilyen ütközésmentes, lokálisan termalizált gázra!

(Csörgő Tamás)

28. A *termionok* – mint az 1996. évi Ortvay verseny óta tudjuk – olyan (hipotetikus) részecskék, amelyek igen gyorsan felveszik a környezet hőmérsékletét. Boltzmann szerint $E = kT$, Einstein szerint $E = mc^2$, szóval a termionok tömege mindig arányos a környezet lokális hőmérsékletével. Ezt nem kell bebizonyítani, ezt egyszerűen el kell hinni.

A termionoknak három fajtája van. A *forronok* szeretik a meleget, ezért rájuk a hőmérséklet gradiensével arányos erő hat. A *vacogonok* ezzel szemben hidegkedvelők, ezért a rájuk ható erő az előbbivel ellentétes irányú, bár nagyságra megegyező. A *temperonok* a szelid, langyos vidéket kedvelik, ezért rájuk a sebességük és a hőmérséklet-gradiens vektoriális szorzatával arányos erő hat. (A számolás során az igényeknek megfelelően további altípusokat is definiálhatunk.)

Tanács: a fellépő sebességdimenziójú állandókat célszerű c-vel jelölni.

Vizsgáljuk meg a termionok egyik vagy másik fajtájából álló ideális gáz termodinamikáját! Vezzesük le a megfelelő állapotegyenleteket!

Mi történik ha egy mozgó dugattyúval – a) eset: a dugattyú hőszigetelő; b) eset: a dugattyú hővezető – elválasztott henger két része két különböző termionfajtából álló gázt tartalmaz? Mi történik, ha megengedjük a kétféle gáz keveredését? Vizsgáljuk meg a rendszer mechanikai és termodinamikai stabilitását!

(Dávid Gyula)

29. Az átlagtér-közelítés az Ising-modell megoldását egyetlen spin vizsgálatára egyszerűsíti: egy kiválasztott spint egzaktul tárgyalunk, miközben a kölcsönható szomszédokat átlagértékükkel helyettesítjük. Az a tény, hogy az Ising-lánc egzaktul megoldható, a közelítés kiterjesztését sugallja: a modellt kölcsönható láncok rendszerének tekintve, egy kiválasztott láncot egzaktul tárgyalunk, miközben a szomszédos láncok spinjeit átlagértékükkel helyettesítjük.

   A két közelítés összehasonlítására számítsuk ki mindkét módon annak az Ising-modellnek az átalakulási hőmérsékletét, amelyben a spinek egy egyszerű köbös rács pontjaiban helyezkednek el, és a kicserélődési együtthatók különböző értékeket vesznek fel az xy síkban és a z tengely irányában. A modell energiája

$$E = -\sum_{i,j,k} \left\{ J_\perp (S_{i,j,k} S_{i+1,j,k} + S_{i,j,k} S_{i,j+1,k}) + J_\parallel S_{i,j,k} S_{i,j,k+1} \right\} - H \sum_{i,j,k} S_{i,j,k} \ ,$$

   ahol az i, j, k egész számok a rácspontok koordinátái, és $S_{i,j,k} = \pm 1$.

   (Sasvári László)

30. Tekintsünk egy egydimenziós láncot, amelynek mentén egymástól szabályos a távolságra egyforma $\mathbf{S}$ ($S \gg 1$) spinek helyezkednek el. A spinek (az elektronfelhő alakjában megnyilvánuló atomi szimmetriák miatt) csak az x-y síkban tudnak forogni, azaz a lánc tengelyére (z-tengely) merőlegesen, a kialakuló struktúra pedig ($T = 0$ hőmérsékleten, külső tér nélkül) egy (két szomszédos pont között) α szöggel elforduló *spirál.* Ez a modell helyesen írja le egyes ritkaföldfémek és átmenetifém-vegyületek *alapállapotát*, amelyekben ismereteink szerint a magspinek és a vezetési elektronok spinjei közti hiperfinom kölcsönhatásból származó hosszútávú (oszcilláló) kicserélődési potenciál adja a Hamilton-operátor domináns részét.

   Ennek értelmében írjuk a tökéletes spirál (kristálytér-effektusok, stb. elhanyagolásával egyszerűsített) Hamilton-operátorát a következő formába:

$$H_{exc} = -S^2 \sum_{i,j} J_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j),$$

   ahol ϕ_i az $\mathbf{S}_i$ spin és az x-tengely által bezárt szög, J_{ij} pedig az $\mathbf{S}_i$ és $\mathbf{S}_j$ spinek kicserélődési csatolását írja le ($J_{ii} = 0$, $J_{ij} = J_{ji}$).

   Ezek után képzeljük el, hogy egy bizonyos pontba egy az előzőektől kissé eltérő $\mathbf{S}'$ spinű mágneses szennyező kerül. Gondoljuk át a szennyeződés fizikai következményeit, majd számítsuk ki az újonnan kapott spirálnak az eredeti ideálishoz képesti δ_i torzulási szögét az összes i pontra nézve! Diszkutáljuk a kapott eredményeket!

   (Magyar Péter)

31. Csatlakoztassunk egy hőtartályhoz egy olyan, m tömegű részecskékből álló Fermi-gázt, melynek minden módusa azonos energiájú! Bármely két részecske között ϵ energiájú kölcsönhatás lép fel. Vizsgáljuk meg a rendszer termodinamikáját!

   (Borsányi Szabolcs)

32. Ideális Bose-gázt tart fogva a $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 y^2 + \frac{1}{2}m\omega_3^2 z^2$ harmonikus csapdapotenciál. Határozzuk meg a Bose-kondenzáció kritikus hőmérsékletét és a kondenzátum részecskeszámának hőmérsékletfüggését!

   (Bene Gyula)

33. Sok esetben fontos az elektronikában (alakatrészekben, eszközökben) felhasználásra kerülő anyagok előzetes vizsgálata — pl. nagyon alacsony, akár 1 K körüli hőmérsékleteken is. Az ideális esetekben az apró mintán keresztül az áram kontaktustól kontaktusig egyenletesen folyik, de gyártás tökéletlensége, valamint az elkerülhetetlen inhomogenitások és szennyezők miatt egy ún. „disordered”, azaz véletlenszerű, szimmetria nélküli $V(\mathbf{r})$ szórópotenciál is megjelenik (a kristály szabályos, rácsperiodikus, az m^* effektív tömegen keresztül figyelembe vett $U(\mathbf{r})$ potenciálja mellett), amely a teljes áram egy részét szabálytalan alakú és kiterjedésű csatornákba szorítja, míg más helyeken szinte alig halad át töltéshordozó. Ennek eredményeképpen a felszín alatt, valahol a minta belsejében térben korlátos szűk tartományokban extra disszipáció lép fel. Ezeknek az általában néhányszor tíz μm kiterjedésű disszipatív „szigeteknek” a megfigyelése technológiai szempontból igen fontos, ehhez pedig rendkivül érzékeny hőmérsékletmérésre van szűkség.

   Na most jön a képzelet birodalma. Tegyük fel, hogy a laborunk csóró (...) és a hőmérőink egytől egyig mind elavultak. Van azonban egy jó lézerünk, a csapból pedig ömlik a szuperfolyékony ^{4}He. Ettől szárnyakat kapunk, és elkezdünk gondolkodni... a szuperfolyékony ^{4}He egy csomó érdekes tulajdonságot, jelenséget mutat ... ha ezek közül néhányat ki tudnánk használni felületi termográfiára, más szóval át tudnánk váltani a ΔT-t Δx-re ... (Tegyünk így, becsszóra, lehet ...)

a) Találjuk meg az alkalmas kísérleti elrendezést, magyarázzuk meg a mérés elvét, és végezzünk néhány egyszerű konkrét számítást is!

b) Mi a (kitalált) módszer érzékenyége? Szükség esetén használjunk néhány realisztikus számadatot! A lézer mérési pontosságát (felbontás) vegyük kb. 1 μm-nek!

(Magyar Péter)

34. Különös lények élnek egy távoli kétdimenziós bolygón. Mindegyikük szívében egy kis antenna található, mely egy egységnyi hosszúságú $\mathbf{b}$ vektorral adható meg, ha a lény ébren van – alvó lény esetén pedig $\mathbf{b} = 0$. Az ellentétes irányú $\mathbf{b}$ vektorral rendelkező egyedek nagy vonzalmat (a mi fogalmaink szerint szerelmet) mutatnak egymás iránt. Egy napon a bájos Antennova egy nagy kerek tó közepén levő aprócska szigetre csónakázott, hogy virágot szedjen. Sajnos nem volt elég gondos, és csónakját elsodorta a víz. Szegény szomorúan és tétlenül üldögélt a szigeten, mivel nem tudott úszni. Abban reménykedett, hogy talán valaki arra jár, és segít neki. Már elég későre járt, mikor megjelent a hős Antennovics, aki melleseleg igen forrón imádta a bájos Antennovát. Mindkettőjük szíve megdobbant – ó minő jelenet! Kár, hogy nem látta senki – hiszen a bolygón mindeki más mélyen aludt.

A hős Antennovics nem habozott, és tüstént megpróbált segíteni a bajba jutott kedvesének. A baj csak az volt, hogy ő sem tudott úszni. Igen bosszankodott emiatt, még a fejét is elvesztette. Le-föl (pontosabban körbe-körbe) szaladgált a kerek tó mentén. E véletlenszerű „termikus tánc” csak a kettejük közti kölcsönhatástól és a külső hőmérséklettől függ. A bolygó különös lakóinak életét már régóta tanulmányozták a kutatók, bevonva néhány fizikus hallgatót is. Az eddigi kutatási eredmények szerint a párok közötti $\mathcal{H}$ kölcsönhatást az alábbi egyszerű alakban adhatjuk meg

$$H = -\frac{\mathcal{H}}{k_{\mathrm{B}}T} = 2K\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\right) - \frac{(\mathbf{b}_1\,\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}_2\,\mathbf{r})}{\mathbf{r}^2}\right],$$

ahol k_{B} a Boltzmann állandó, T a hőmérséklet, $\mathbf{r}$ a két lényt összekötő vektor, míg $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a megfelelő antennavektoruk és K a csatolási állandó. A kutatócsoport fizikus hallgatói a következő ötlettel próbálták meghatározni az eddig még ismeretlen K csatolási állandót. Nagyszámú fényképfelvételt készítettek a hős Antennovics helyzetéről. A felvételekből meghatározták a párt összekötő $\mathbf{r}$ vektort, majd elkészítették az $< r_i r_j >$ átlagot (itt r_i az $\mathbf{r}$ vektor i-dik komponense). Feltették, hogy elegendő felvétel áll rendelkezésükre, hogy a fenti átlagot a termodinamikai átlaggal helyettesítsék. Az egymás iránti – szemmel láthatóan – erős vonzalom alapján azt is feltették, hogy a szerelmes pár antennavektorai ellentétes irányúak (az eddigi kutatások tanusága szerint ezt joggal gondolhatták).

A számításaik során gondok merültek fel, ezért az Ortvay versenyzők segítségét kérik. Hogyan lehet a fentiek alapján meghatározni a K csatolási állandót? Meg lehet-e határozni e kedves pár antennavektorait?

(Cserti József)

35. A Roland-hágó a francia Pireneusok egyik legmeglepőbb látványa: egy hatalmas sziklafalból jókora darab hiányzik (`http://ortvay.elte.hu/1998/roland.jpg`). A legenda szerint a hős Roland itt csatázott a mórokkal, és közülük sok százat pazar kardjának élére hányt, ám egy idő után érezte, hogy ereje kezdi elhagyni. Nem is az bosszantotta leginkább, hogy meg kell halnia, hiszen hős volt (lásd fentebb), hanem az, hogy kardja az ellenség kezére juthat. Így hát összeszedte utolsó erejét, hogy kardját egy nagy sziklán kicsorbítsa — és akkorát talált odasózni, hogy a francia Pireneusok csorbultak ki.

Szmítsuk ki, milyen fizikai következményekkel jár a fenti interpretáció!

(Piróth Attila)

\end{document}